ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
2008, том 51, №6

ИНФОРМАТИКА

УДК 519:87:681.8

Ф.И.Ерешко[*], М.А.Горелов[*], С.Т.Наврузов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ КООПЕРАЦИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВОДНЫХ РЕСУРСОВ БАССЕЙНОВ ТРАНСГРАНИЧНЫХ РЕК

(Представлено академиком АН Республики Таджикистан З.Д.Усмановым 07.04.2008 г.)

В работе [1] описана проблема вододеления в условиях трансграничных бассейнов, проводится системный анализ проблемы, предложены модели и принципиальные обоснования кооперации стран-пользователей водных ресурсов трансграничных рек. Настоящая работа развивает указанные подходы и содержит формальное обоснование целесообразности кооперации стран-водопотребителей.

Статическая модель отдельной страны. Рассмотрим процесс управления расходованием водных ресурсов в отдельно взятой стране в пределах одного года. Будем предполагать, что в рассматриваемой стране имеется одна электростанция и при ней водохранилище, позволяющее создавать запасы воды. Пусть A_u – площадь, занятая под сельскохозяйственные культуры и расположенная выше водохранилища по течению, а A_d – площадь, занятая под сельскохозяйственные культуры и расположенная ниже водохранилища. Обе эти величины являются управлениями оперирующей страны.

Обозначим w_u – объем воды, приходящей на территорию данной страны через государственную границу, w_o – объем осадков, выпадающих непосредственно на территории данной страны. Обе эти величины будем считать случайными с известными распределениями вероятностей. Распределение величины w_o определяется природными факторами, для получения распределения величины w_u нужно знать принципы поведения сопредельной страны (можно, например, предполагать, что оно описывается моделью, аналогичной данной).

Пусть w_b – сброс воды через плотину водохранилища до периода полива, w_w – сброс воды через плотину водохранилища в период полива, w_a – сброс воды через плотину водохранилища после периода полива. Эти три величины считаем также управлениями оперирующей стороны.

Аналогично e_b – производство электроэнергии на электростанции до периода полива, e_w – производство электроэнергии на электростанции в период полива, e_a – производство электроэнергии на электростанции после периода полива. Будем считать, что производство электроэнергии определяется производственными функциями $e_b=\varphi(w_b)$, $e_w=\psi(w_w)$, $e_a=\varphi(w_a)$. Разница в производственных функциях обусловлена тем, что в период полива на режим сброса воды могут накладываться дополнительные ограничения, отражающие запросы сельского хозяйства. Мы будем предполагать, что в каждый из этих периодов режимы работы электростанции выбираются оптимальным образом, а потому функции φ и ψ монотонно возрастают. Кроме того, будем считать, что здесь уже учтены ограничения по мощности электростанции, предполагая, что значения производственных функций не меняются, начиная с некоторой величины. Пусть p_e – денежные затраты на производство единицы электроэнергии.

Обозначим c_u – объем воды, затрачиваемый на полив из источников, находящихся выше по течению от водохранилища, а c_d – объем воды, затрачиваемый на полив из источников, находящихся ниже по течению от водохранилища. Эти величины тоже являются управлениями. Примем ограничения на выбор управлений в форме вероятностных ограничений, что обеспечивает уровень гарантированной отдачи водного объекта: $Вер(c_u \geq w_u + w_o,\ c_d \geq w_w) > b$, где уровень b характеризует гарантию, на которую рассчитывает управляющий орган страны. Пусть C_u – объем сельскохозяйственной продукции, произведенной на площадях, расположенных выше водохранилища, а C_d – объем сельскохозяйственной продукции, произведенной на площадях, расположенных ниже водохранилища. Будем считать, что объемы производства определяются производственными функциями $C_u = \Phi(A_u, c_u)$ и $C_d = \Psi(A_d, c_d)$. Разница производственных функций может определяться различиями природных условий. Принимаем, что при фиксированных A_u и A_d функции Φ и Ψ монотонно возрастают и вогнуты по c_u и c_d соответственно. Пусть p_c – денежные затраты на производство единицы сельхозпродукции.

Предположим, что за получаемую воду w_u страна платит сумму m_u, а за воду $w_d = w_b + w_w + w_a - c_d$ получает сумму m_d. Суммы m_u и m_d считаем в этой модели заданными параметрами (мы не исключаем случая, когда они равны нулю, что соответствует некооперативному управлению).

Пусть W_b – запас воды в водохранилище на начало года, W_a – запас воды в водохранилище на конец года. Предполагаем, что выполняется балансовое соотношение

$$W_a = W_b + w_u + w_o - c_u - w_b - w_w - w_a.$$

Будем считать, что качество управления системой оценивается по следующим вспомогательным критериям: производством сельхозпродукции $C = C_u + C_d$; объемами производства электроэнергии e_b, e_w и e_a; вероятностью чрезвычайного положения в результате засухи в будущем, которая монотонно зависит от запаса воды W_a; финансовыми затратами $f = p_e(e_b + e_w + e_a) + p_c C$; сальдо расчетов за воду $m_d - m_u$.

Предположим, что оперирующая сторона пользуется сверткой критериев $g(C, e_b, e_w, e_a, W_a, f, m_d - m_u)$ [2]. Естественно предполагать, что функция g убывает по аргументу f и возрастает по остальным аргументам.

Замечание. В рассматриваемой ситуации могут быть еще следующие ограничения. Ограничение по продовольственной безопасности $C \geq C_*$. Ограничения по энергетической безопасности $e_b \geq e_{b^*}$, $e_w \geq e_{w^*}$, $e_a \geq e_{a^*}$ (именно поэтому величины e_b, e_w, e_a входят в свертку по отдельности, а не в сумме, так как мы считаем, что электроэнергию нельзя запасать.) Ограничение по объему водохранилища $W_a \leq W_*$. Ограничение по финансам $f \leq f_*$. Ограничение, обеспечивающее экологическую и/или политическую стабильность вида $w_d \geq \pi$. Эти ограничения носят «мягкий» характер (один киловатт час электроэнергии вряд ли может коренным образом изменить ситуацию). Поэтому их правильно учитывать с помощью штрафных функций. В дальнейшем будем предполагать, что это уже сделано при формировании свертки g.

Будем считать, что в отношении неопределенности притоков воды w_u и w_o оперирующая сторона ориентируется на математическое ожидание своего критерия g. Предположим, что площади посевов A_u и A_d выбираются до того, как станут известны реализации этих случайных величин, а остальные управления выбираются после того, как конкретные объемы станут известны. В таком случае управления $w_b, w_w, \ldots$ следует считать функциями w_u и w_o. В этих условиях задача оптимизации имеет характер двухэтапной задачи стохастического программирования: максимальное математическое ожидание критерия оперирующей стороны определится формулой

$$\max_{A_u, A_d} \mathrm{M} \max_{w_b, w_w, w_a, c_u, c_d} g,$$

здесь M обозначает оператор вычисления математического ожидания [3,4].

Поиск оптимальных управлений. Выпишем необходимые условия оптимальности управлений в задаче, сформулированной в предыдущем разделе.

Уменьшив значение w_b на бесконечно малую величину δ, увеличив на ту же величину значение w_w и не меняя остальных управлений, мы изменим значение критерия на величину $\left(\frac{\partial g}{\partial e_w} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial w_w} - \frac{\partial g}{\partial e_b} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w_b}\right)\delta$. Поэтому в точке оптимума должно выполняться равенство $\frac{\partial g}{\partial e_w} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial w_w} = \frac{\partial g}{\partial e_b} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w_b}$.

По аналогичным соображениям, должно выполняться равенство $\frac{\partial g}{\partial e_w} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial w_w} = \frac{\partial g}{\partial e_a} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w_a}$.

Уменьшив значение c_u на бесконечно малую величину δ, увеличив на ту же величину значения w_w и c_d и не меняя прочих управлений, мы изменим значение критерия на величину $\left(\frac{\partial g}{\partial C} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial c_d} + \frac{\partial g}{\partial e_w} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial w_w} + \frac{\partial g}{\partial f} p_e - \frac{\partial g}{\partial C} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial c_u}\right) \cdot \delta$. Отсюда следует

Лемма 1. В оптимальной точке должно выполняться равенство

$$\frac{\partial g}{\partial C}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial c_d}+\frac{\partial g}{\partial e_w}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial w_w}+\frac{\partial g}{\partial f}p_e=\frac{\partial g}{\partial C}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial c_u}.$$

Из этого равенства и сделанных в предыдущем разделе предположений о монотонности вытекает следующее утверждение.

Следствие. Если $\frac{\partial g}{\partial e_w}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial w_w}+\frac{\partial g}{\partial f}p_e>0$, то $\frac{\partial g}{\partial C}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial c_d}<\frac{\partial g}{\partial C}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial c_u}$.

Смысл леммы следующий: при прочих равных условиях сельскохозяйственное производство выгоднее размещать ниже по течению, поскольку при этом вода, до того как будет использована на полив, обеспечит выработку электроэнергии. Дополнительные условия означают, что доходы от производства электроэнергии должны окупать затраты, что при современных технологиях выполняется, если нет дефицита мощностей.

Фиксируем механизм расчета за воду. Будем считать, что рассматриваемая страна покупает воду у лежащей выше по течению по цене p_u и продает нижележащей стране по цене p_d.

Лемма 2. Пусть случайные величины w_u и w_u' таковы, что вероятность выполнения неравенства $w_u>x$ при любом x больше вероятности выполнения неравенства $w_u'>x$. Если выполняется условие $p_u<p_d$, тогда значение критерия $\max\limits_{A_u,A_d}\mathrm{M}\max\limits_{w_b,w_w,w_a,c_u,c_d} g$, вычисленное для величины w_u больше, чем аналогичное значение, вычисленное для величины w_u'.

Доказательство. Фиксируем управления A_u и A_d, доставляющие максимум функции $\mathrm{M}\max\limits_{w_b,w_w,w_a,c_u,c_d} g$ при выполнении всех ограничений, описанных в предыдущем разделе, и функции w_b, w_w, w_a, c_u и c_d, реализующие максимум свертки g при всех значениях параметров w_u и w_o и при выполнении всех ограничений, описанных в предыдущем разделе. Тогда $g(C,e_b,e_w,e_a,W_a,f,p_dw_d-p_uw_u)<g'(C,e_b,e_w,e_a,W_a,f,p_dw_d-p_uw_u)$ (здесь g' – значение критерия в задаче, аналогичной описанной в предыдущем разделе, но с величиной w_u' вместо величины w_u). Значит,

$$\max_{w_b,w_w,w_a,c_u,c_d} g(C,e_b,e_w,e_a,W_a,f,p_dw_d-p_uw_u)<g'(C,e_b,e_w,e_a,W_a,f,p_dw_d-p_uw_u),$$

и тем более

$$\max_{w_b,w_w,w_a,c_u,c_d} g(C,e_b,e_w,e_a,W_a,f,p_dw_d-p_uw_u)<\max_{w_b,w_w,w_a,c_u,c_d} g'(C,e_b,e_w,e_a,W_a,f,p_dw_d-p_uw_u).$$

Отсюда последовательно получаем неравенства:

$$\mathrm{M}\max_{w_b,w_w,w_a,c_u,c_d} g(C,e_b,e_w,e_a,W_a,f,p_dw_d-p_uw_u)<\mathrm{M}\max_{w_b,w_w,w_a,c_u,c_d} g'(C,e_b,e_w,e_a,W_a,f,p_dw_d-p_uw_u)$$

и

$$\max_{A_u,A_d} \mathrm{M} \max_{w_b,w_w,w_a,c_u,c_d} g(C,e_b,e_w,e_a,W_a,f,p_d w_d) < \max_{A_u,A_d} \mathrm{M} \max_{w_b,w_w,w_a,c_u,c_d} g'(C,e_b,e_w,e_a,W_a,f,p_d w_d).$$

Лемма доказана.

Смысл леммы следующий: если поступающая вода дешевле продаваемой, то увеличение притока воды только увеличивает значение критерия.

Распределение ресурса в условиях кооперации. Рассмотрим страны, расположенные вдоль русла одной реки. Перенумеруем их натуральными числами от 1 до n сверху вниз по течению. Каждую из стран будем описывать моделью, аналогичной той, которая описана в первом разделе. Введем обозначения.

Пусть A_u^k – площадь, занятая под сельскохозяйственные культуры и расположенная выше водохранилища по течению в k-ой стране, а A_d^k – площадь, занятая под сельскохозяйственные культуры и расположенная ниже водохранилища в той же стране. Обе эти величины являются управлениями соответствующей страны.

Обозначим w^k – объем воды, приходящей на территорию k-ой страны через государственную границу, w_o^k – объем осадков, выпадающих непосредственно на территории данной страны. Величину w_o^k будем считать случайной с известным распределением вероятностей, которое определяется природными факторами. Пусть w_b^k – сброс воды через плотину водохранилища k-ой страны до периода полива, w_w^k – сброс воды через ту же плотину в период полива, w_a^k – сброс воды через плотину водохранилища этой страны после периода полива. Эти три величины считаем управлениями данной страны.

Аналогично e_b^k – производство электроэнергии на электростанции до периода полива, e_w^k – производство электроэнергии на электростанции в период полива, e_a^k – производство электроэнергии на электростанции после периода полива (все относится к k-ой стране). Будем считать, что производство электроэнергии определяется производственными функциями $e_b^k = \varphi^k(w_b^k)$, $e_w^k = \psi^k(w_w^k)$, $e_a^k = \varphi^k(w_a^k)$. Как и выше, считаем, что функции φ^k и ψ^k монотонно возрастают.

Пусть p_e^k – денежные затраты на производство единицы электроэнергии в k-ой стране.

Обозначим c_u^k – объем воды, затрачиваемый на полив из источников, находящихся в k-ой стране выше по течению от водохранилища, а c_d^k – объем воды, затрачиваемый на полив из источников, находящихся в той же стране, но ниже по течению от водохранилища. Эти величины тоже являются управлениями. Положим, как и ранее $Вер(c_u^k \le w_u^k + w_o^k, c_d^k \le w_w^k) \ge b$.

Пусть C_u^k – объем сельскохозяйственной продукции, произведенной в k-ой стране на площадях, расположенных выше водохранилища, а C_d^k – объем сельскохозяйственной продукции, произведенной в той же стране на площадях, расположенных ниже водохранилища. Будем считать, что объемы производства определяются производственными функциями $C_u^k = \Phi^k(A_u^k, c_u^k)$ и $C_d^k = \Psi^k(A_d^k, c_d^k)$. Как и прежде, будем предполагать, что при фиксированных A_u и A_a функции Φ^k и Ψ^k монотонно возрастают и вогнуты по c_u и c_d соответственно.

Пусть p_c^k – денежные затраты на производство единицы сельхозпродукции в k-ой стране. Принимаем балансовое соотношение $w^{k+1} = w_b^k + w_w^k + w_a^k - c_d^k$. Естественно считать, что w^1=0.

Пусть W_b^k – запас воды в водохранилище на начало года, W_a^k – запас воды в водохранилище на конец года. Также определяем балансовое соотношение

$$W_a^k = W_b^k + w^k + w_o^k - c_u^k - w_b^k - w_w^k - w_a^k .$$

Предположим, что k-я страна платит стране, лежащей непосредственно выше по течению, сумму m^k за используемую воду.

Будем считать, что цели k-ой страны описываются следующими вспомогательными критериями: производством сельхозпродукции $C^k = C_u^k + C_d^k$; объемами производства электроэнергии e_b^k, e_w^k и e_a^k; вероятностью чрезвычайного положения в результате засухи в будущем, которая монотонно зависит от запаса воды W_a^k; финансовыми затратами $f^k = p_e^k(e_b^k + e_w^k + e_a^k) + p_c^k C^k$; средствами $m^{k+1} - m^k$, вырученными за воду.

Предположим, что оперирующая сторона пользуется сверткой критериев $g^k(C^k, e_b^k, e_w^k, e_a^k, W_a^k, f^k, m^{k+1} - m^k)$. Относительно этой свертки и отношении страны к неопределенности делаем те же предположения, что и в первом разделе.

Эффективное распределение ресурсов. Один из эффективных (оптимальных по Парето) способов распределения водных ресурсов может быть найден следующим образом. Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \max_{A_u^k, A_d^k} \mathrm{M} \max_{w_b^k, w_w^k, w_e^k, c_u^k, c_d^k} g^k .$$

Найдем максимум этой суммы по всем управлениям всех стран и ценам на воду p^k, удовлетворяющим сформулированным в предыдущем разделе ограничениям (стандартные рассуждения показывают, что при разумных предположениях этот максимум достигается). Соответствующие управления будут эффективными [2,5].

Рассмотрим изолированное поведение игроков. Решим задачу оптимизации, описанную выше для первой страны. При этом будут найдены оптимальные управления как функции случайных параметров, и тем самым будет определена величина w^2 как функция этих случайных параметров. Теперь можно решить аналогичную оптимизационную задачу для второй страны и т. д. Найденный набор управлений будем называть точкой status quo.

Фиксируем следующий механизм расчетов за воду. Будем считать, что за объем воды w^k, соответствующий точке status quo, страна ничего не платит, а воду сверх этого количества приобретает по цене p^k.

Сокращая затраты на полив участков, расположенных ниже водохранилища, на бесконечно малую величину δ, k-я страна уменьшит свой выигрыш на величину $\frac{\partial g^k}{\partial C^k}\cdot\frac{\partial \Psi^k}{\partial c_d^k}\delta$. Но при этом она получит дополнительные деньги $p^{k+1}\delta$, за счет чего ее выигрыш увеличится на величину $\frac{\partial g^k}{\partial m^{k+1}}p^{k+1}\delta$. Понятно, что такое сокращение выгодно, если $\frac{\partial g^k}{\partial C^k}\cdot\frac{\partial \Psi^k}{\partial c_d^k}<\frac{\partial g^k}{\partial m^{k+1}}p^{k+1}$.

Аналогично, если k+1-я страна купит бесконечно малый объем воды δ по цене p^{k+1}, ее выигрыш уменьшится на величину $\frac{\partial g^{k+1}}{\partial m^{k+1}}p^{k+1}\delta$. Но эту воду она сможет использовать для производства электроэнергии и сельхозпродукции, за счет чего ее выигрыш увеличится на величину $\left[\frac{\partial g^{k+1}}{\partial C^{k+1}}\cdot\frac{\partial \Psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}}+\frac{\partial g^{k+1}}{\partial e_w^{k+1}}\cdot\frac{\partial \psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}}\right]\delta$. Ясно, что приобретение воды выгодно, если $\frac{\partial g^{k+1}}{\partial C^{k+1}}\cdot\frac{\partial \Psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}}+\frac{\partial g^{k+1}}{\partial e_w^{k+1}}\cdot\frac{\partial \psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}}>\frac{\partial g^{k+1}}{\partial m^{k+1}}p^{k+1}$.

Пусть выполняется неравенство

$$\frac{\frac{\partial g^{k+1}}{\partial C^{k+1}}\cdot\frac{\partial \Psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}}+\frac{\partial g^{k+1}}{\partial e_w^{k+1}}\cdot\frac{\partial \psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}}}{\frac{\partial g^{k+1}}{\partial m^{k+1}}}>\frac{\frac{\partial g^k}{\partial C^k}\cdot\frac{\partial \Psi^k}{\partial c_d^k}}{\frac{\partial g^k}{\partial m^k}}. \tag{1}$$

Тогда для любой цены p^{k+1}, удовлетворяющей условию

$$\frac{\frac{\partial g^{k+1}}{\partial C^{k+1}}\cdot\frac{\partial \Psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}}+\frac{\partial g^{k+1}}{\partial e_w^{k+1}}\cdot\frac{\partial \psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}}}{\frac{\partial g^{k+1}}{\partial m^{k+1}}}>p^{k+1}>\frac{\frac{\partial g^k}{\partial C^k}\cdot\frac{\partial \Psi^k}{\partial c_d^k}}{\frac{\partial g^k}{\partial m^k}}, \tag{2}$$

сделка по продаже воды по этой цене выгодна обеим сторонам.

Теорема. Пусть в точке status quo неравенства (1) выполняются для всех k. Тогда точка status quo не является эффективной.

Доказательство. Как показано выше, передача достаточно малых количеств воды сверху вниз по ценам, удовлетворяющим неравенствам (2), приводит к увеличению выигрышей всех стран, поэтому точка status quo не может быть эффективной. В частности, в ней не достигается максимум суммы $\sum_{k=1}^{n} \max_{A_b^k, A_a^k} \mathrm{M} \max_{w_b^k, w_v^k, w_a^k, c_a^k, c_d^k} g^k$.

Понятно, что неравенства (1) выполняются, если страны находятся в «равных» природных и экономических условиях. На практике интересен случай, когда страны, лежащие ниже по течению, испытывают большую нужду в воде. В таком случае разница между левой и правой частями неравенства (1), а следовательно, и возможность компромисса еще больше. Выгода от кооперации может быть даже больше, чем описано в данной модели, если нижележащая страна может платить за воду не деньгами, а сельхозпродукцией, что смягчает ограничения по продовольственной безопасности. В случае, если имеется единая энергетическая система, то же относится и к ограничениям по энергетической безопасности.

Динамический вариант модели. В работе [1] при сделанных содержательных предположениях был сформулирован качественный вывод о целесообразности коалиции стран в рамках описанной модели. Теперь, на основе доказанной теоремы, по индукции, начиная с $t=T$ и кончая $t=1$, проверяется, что на каждом шаге описанных в динамическом случае алгоритмов решаются задачи, полностью аналогичные задачам, решавшимся двумя разделами выше при анализе статических моделей. Поэтому все качественные выводы, полученные ранее, сохраняются и в динамическом случае. Разумеется, эффект от кооперации будет накапливаться от года к году.

Институт экономики Таджикистана,
**Вычислительный Центр РАН*

Поступило 07.04.2008 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ерешко Ф.И., Наврузов С.Т. – ДАН РТ, 2008, т.51, №3, с.256-263.
2. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. – М.: Наука, 1971, 384 с.
3. Хранович И.Л. Управления водными ресурсами. Потоковые модели. – М.: Научный мир, 2001, 295 с.
4. Данилов-Данилян В.И., Хранович И.Л. – Экономика и математические методы, 2007, т.43, №1, с.16-26.
5. Карлин С. Математические модели и методы в теории игр, программировании и экономике. - М.: Мир, 1964, 410 с.

Ф.И.Ерешко, М.А.Горелов, С.Т.Наврузов

ТАЪМИНОТИ МАТЕМАТИКИИ ҲАМКОРӢ ОИДИ ИСТИФОДАИ ЗАХИРАИ ОБИ ҲАВЗАИ ДАРЁҲОИ БАЙНИСАРҲАДӢ

Дар мақола таъминоти математикии ҳамкорӣ оиди ёфтани ҳалли мусолиматомези тақсимоти захираҳои обҳои дарёҳои байнисарҳадӣ оварда шудааст.

F.I.Ereshko, M.A.Gorelov, S.T.Navruzov

MATHEMATICAL SUBSTANTIATION OF COOPERATION FOR UTILIZATION OF WATER RESOURCES IN THE BASINS OF TRANSBOUNDARY RIVERS

In the paper a mathematical substantiation with appropriate technique of finding a compromise solution for management of water resources in the basins of transboundary rivers is studied.