

УДК 539.3

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ И РУСЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ РЕКИ АМУР

© 2011 г.

*И.И. Потанов*

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск

potapovii@rambler.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

В рамках плановой русловой задачи проведено математическое моделирование гидродинамических и русловых процессов реки Амур в окрестности г. Хабаровска. Гидродинамическая часть задачи сформулирована в рамках планового уравнения мелкой воды, задача переформирования русла реки сформулирована с использованием оригинального уравнения русловых деформаций.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, русловые процессы, уравнение русловых деформаций.

### Введение

Изучению русловых процессов в реках с несвязным дном посвящено достаточно много экспериментальных и теоретических работ [1], сложность выполнения которых связана с необходимостью определения гидравлического сопротивления потока и феноменологических параметров русловой модели в каждый расчетный период. В настоящем исследовании используется русловая модель, построенная на основе семейства русловых моделей [2, 3], не содержащих в себе феноменологических параметров. Рассматриваемая формулировка русловой задачи приводится в глобальной системе координат, что позволяет использовать для решения гидравлической и русловой задачи одни и те же расчетные сетки.

### Математическая постановка задачи

Рассматриваемая задача деформаций дна несвязного речного русла реки Амур определяется следующими уравнениями [4, 5]:

$$\frac{\partial q_i u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v_t H \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) - l_{ij} q_j + gH \frac{\partial(H + \zeta)}{\partial x_i} - \lambda q_i |u_k| = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \Lambda_{ij} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_i \partial x_j} + K_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + Q = 0, \quad i, j = \overline{1, 2}, \quad (3)$$

$$\Lambda_{ij} = -C_0 \frac{4 |u_i|}{15 \text{tg} \varphi} \times \begin{bmatrix} 5(1 - \chi)u_1^2 + 4u_2^2 & (9 - 5\chi)u_1 u_2 \\ (9 - 5\chi)u_1 u_2 & 5(1 - \chi)u_2^2 + 4u_1^2 \end{bmatrix},$$

$$K_i = -\frac{4C_0}{15 |u_i|} \times \left( \begin{array}{l} u_1(15u_1^2 + 3u_2^2 - 5\chi(3u_1^2 + u_2^2)) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \\ + u_2(23u_1^2 + 5u_2^2 - 5\chi(3u_1^2 + u_2^2)) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \\ + u_2(6u_1^2 - 12u_2^2 - 10\chi u_1^2) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \\ + u_1(4u_1^2 + 22u_2^2 - 10\chi u_2^2) \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ u_2(22u_1^2 + 4u_2^2 - 10\chi u_1^2) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \\ + u_1(6u_2^2 - 12u_1^2 - 10\chi u_2^2) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \\ + u_1(5u_1^2 + 23u_2^2 - 5\chi(u_1^2 + 3u_2^2)) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \\ + u_2(15u_2^2 - 3u_1^2 - 5\chi(u_1^2 + 3u_2^2)) \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \end{array} \right),$$

$$Q = -4C_0 \text{tg} \varphi (1 - \chi) \times \left( u_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 u_2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + u_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right),$$

$$C_0 = \frac{\lambda^{3/2}}{(1 - \varepsilon) \kappa \gamma \text{tg}^2 \varphi}, \quad \gamma = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w},$$

$$\chi = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{d\gamma g \operatorname{tg} \varphi \kappa^2}{c_x \lambda |u_i|^2}},$$

где  $q_i = u_i H$  – компоненты вектора расхода речного потока,  $u_i$  – компоненты вектора осредненной по глубине скорости речного потока,  $H$  – глубина речного потока,  $\zeta$  – площадь поверхности дна,  $l_{ij}$  – коэффициенты тензора Кориолиса,  $\lambda$  – коэффициент гидравлического сопротивления,  $\varphi$  – угол внутреннего трения донных частиц,  $\kappa$  – постоянная Кармана;  $\rho_w$ ,  $\rho_s$  – плотности частиц и воды,  $d$  – диаметр частиц песка,  $c_x$  – лобовое сопротивление частиц,  $\varepsilon$  – пористость донного материала,  $x_i$  – координатные переменные,  $t$  – время,  $\nu_t$  – коэффициент турбулентной диффузии.

Задача (1)–(3) замыкается в области  $\Omega$  начальными условиями для донной поверхности  $\zeta_0$

$$\zeta(x_i, 0) = \zeta_0(x_i), \quad x_i \in \Omega$$

и граничными условиями для твердого стока  $G$ , расхода речного потока  $q_i$  и неразмываемой береговой зоны  $\zeta_g$  на границах области  $\Gamma = \Gamma_q \cup \Gamma_g$  соответственно:

$$\zeta(x_i, t) = \zeta_g(x_i, t), \quad x_i \in \Gamma_g,$$

$$\Lambda_{ij} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} n_j = G, \quad x_i \in \Gamma_q,$$

$$q_i(x_i, t) = q_{i0}(x_i), \quad x_i \in \Gamma_q,$$

$$q_i(x_i, t) = 0, \quad x_i \in \Gamma_g.$$

## MODELING THE FLUVIAL PROCESSES OF THE AMUR RIVER

*I.I. Potapov*

The hydrodynamic and fluvial processes of the Amur river near Khabarovsk have been mathematically modeled as a part of the routine task. The hydrodynamic part of the problem is formulated within the framework of the shallow water equations; the task of reshaping the river bed is formulated using the original equation of channel deformations.

*Keywords:* mathematical modeling, channel processes, the equation of channel deformations.

## Выводы

На основе двумерных математических моделей с использованием метода конечных элементов разработан метод расчета гидродинамических и русловых процессов. Предложен алгоритм численного решения задачи. Численно исследован процесс отступления берегового склона реки Амур в области слияния ее с Амурской протокой, проведено сравнение полученных результатов с натурными данными.

*Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракт № 02.740.11.0626.*

## Список литературы

1. Караушев А.В. Теория и методы расчета речных наносов. Л.: Гидрометеиздат, 1977. 271 с.
2. Петров П.Г. Движение донных наносов под воздействием потока жидкости // МЖГ. 1988. №2. С. 182–185.
3. Петров А.Г., Петров П.Г. Вектор расхода наносов в турбулентном потоке над размываемым дном // ПМТФ. 2000. Т. 41, №2. С. 102–112.
4. Потапов И.И. Двухмерная модель транспорта донных наносов для рек с песчаным дном // ПМТФ. 2009. Т. 50, №3. С. 131–139.
5. Петров А.Г., Потапов И.И. О развитии возмущений песчаного дна канала // Докл. РАН. 2010. Т. 431, №2. С. 191–195.