

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ

Ш.Х. Рахимов, И. Бегимов
САНИИРИ

Процессы, протекающие в водохозяйственных объектах, происходят в многомерной (двумерной и трехмерной) пространственной области, а также во времени. Сложность этих процессов не позволяет исследователям, проектировщикам и эксплуатационникам оперативно оценить качественные и количественные параметры работы участков русла рек, каналов и гидротехнических сооружений для реализации необходимого режима управления водными ресурсами. В связи с широким развитием численных методов решения сложных математических задач при помощи современных компьютерных технологий появилась реальная возможность получать конкретные качественные и количественные характеристики различных сложных динамических процессов. В данной работе при моделировании неустановившегося движения водного потока в водохозяйственных объектах учитывается их двумерное течение в пространстве, обеспечивающее повышение их качественных и количественных характеристик, а также выбор наилучших параметров объектов при их проектировании и эксплуатации.

Постановка задачи. Двумерное уравнение Сен-Венана, описывающее неустановившееся течение воды в открытых руслах [1] принято в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} + i &= 0, \\ \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} + g \frac{\partial(h^2/2)}{\partial x} &= gh(S_{ax} - S_{fx}), \\ \frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(v^2h)}{\partial y} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + g \frac{\partial(h^2/2)}{\partial y} &= gh(S_{ay} - S_{fy}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x – координата оси по длине; y – координата оси по ширине; t – время; $h=h(x,y,t)$ – глубина водной поверхности; $u=u(x,y,t)$ – продольная составляющая скорости водного потока; $v=v(x,y,t)$ – поперечная составляющая скорости водного потока; S_{ax} – уклон дна по оси x , S_{ay} – уклон дна по оси y , S_{fx} – уклон свободной поверхности воды по оси x , S_{fy} – уклон свободной поверхности воды по оси y ; g – ускорение силы тяжести; $i(x,y,t)$ – интенсивность поступлений воды.

Ордината дна канала задается функцией $z_o(x,y)$, тогда уклоны дна по соответствующим координатам определяются

$$S_{ax} = \frac{\partial z_o}{\partial x}, \quad S_{ay} = \frac{\partial z_o}{\partial y}, \quad (2)$$

С помощью формулы Маннинга получим уклоны свободных поверхностей по ординатам.

$$\begin{aligned}
S_{fx} &= \frac{n^2 u (u^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}} \\
S_{fy} &= \frac{n^2 v (u^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}},
\end{aligned} \tag{3}$$

Введем замену переменных $p=uh$, $q=vh$, тогда уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + i &= 0 \\
\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pq}{h} \right) + gh \frac{\partial z_0}{\partial x} + gn^2 \frac{p(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{7}{3}}} &= 0
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (v^2 h)}{\partial y} + \frac{\partial (uvh)}{\partial x} + g \frac{\partial (h^2 / 2)}{\partial y} = gh(S_{ay} - S_{fy})$$

В векторной форме эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \mathbf{D} = 0, \tag{5}$$

где U,F,G и D векторы функции

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ p \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} p \\ \frac{p^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \\ \frac{pq}{h} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} p \\ \frac{pq}{h} \\ \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} i \\ gh \frac{\partial z_0}{\partial x} + gn^2 \frac{p(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{7}{3}}} \\ gh \frac{\partial z_0}{\partial y} + gn^2 \frac{q(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{7}{3}}} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

Функции F(U) и G(U) зависят от функции U, поэтому уравнение (5) запишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathbf{D} = 0 \tag{8}$$

Уравнение (8) в векторно-матричной форме имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \mathbf{D} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (9)$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{p^2}{h^2} + gh & \frac{2p}{h} & 0 \\ -\frac{pq}{h^2} & \frac{q}{h} & \frac{q}{h} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{pq}{h} & \frac{q}{h} & 0 \\ -\frac{q^2}{h^2} + gh & 0 & \frac{2q}{h} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Для однозначности решения данного уравнения необходимо задать начальные и граничные условия.

Начальные условия характеризуют движение потока воды в какой-то момент времени t_0 , принимаемый за начальное движение.

$$\mathbf{U}(x, y, t_0) = \mathbf{U}_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (12)$$

где $\mathbf{U}_0(x, y)$ – заданные функции распределения глубины и расходов потока, Ω – двумерная область. Область определения переменных, где происходит движение потока воды, имеет сложную геометрическую форму в случае участка реки или естественного канала.

Существенная трудность в постановке двумерной задачи состоит в задании граничных условий. Будем считать границу $d\Omega$ области Ω , состоящей из жидких и непроницаемых твердых частей, т.е. $d\Omega = \{d\Omega_{ж}, d\Omega_{т}\}$, причем эти части границы могут состоять из нескольких частей.

На жидкой части граница задается как изменение глубины или расхода воды

$$\begin{aligned} h_i(x, y, t) &= H_i(t), \\ q_i(x, y, t) \cos \alpha + p_i(x, y, t) \sin \alpha &= Q_i(t), \\ \alpha &= \overset{\wedge}{(n, Ox)}, \quad (x, y) \in d\Omega_{жи}, \quad i = 1, n_{ж}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $q_i(x, y, t)$ и $p_i(x, y, t)$ неизвестные продольные и поперечные составляющие расходы потока воды, $H_i(t)$ и $Q_i(t)$ – заданные функции изменения глубины и расходов потока воды на соответствующей жидкой части, α – угол между осями нормали к границе и x .

На твердой части границы задается в виде

$$\begin{aligned} q_i(x, y, t) \cos \alpha + p_i(x, y, t) \sin \alpha &= 0, \\ \alpha &= \overset{\wedge}{(n, Ox)}, \quad (x, y) \in d\Omega_{ти} \quad i = 1, n_{т}. \end{aligned} \quad (14)$$

Физический смысл (14) означает, что суммарные составляющие продольных и поперечных расходов воды по нормали к границе будут равны нулю.

Общей границей области будет объединение твердых и жидких частей границы

$$d\Omega = d\Omega_{\text{ж}} \cup d\Omega_{\text{т}}, \quad d\Omega_{\text{ж}} = \bigcup_{i=1}^{n_{\text{ж}}} d\Omega_{\text{жи}}, \quad d\Omega_{\text{т}} = \bigcup_{i=1}^{n_{\text{т}}} d\Omega_{\text{ти}}, \quad (15)$$

Таким образом, для моделирования двумерного течения воды в открытых руслах необходимо решить систему уравнений (9) с краевыми условиями (12)-(14).

Система уравнений (9) относится к квазилинейным дифференциальным уравнениям в частных производных со сложными краевыми условиями и областями определения переменных, точное решение сформулированной задачи получить невозможно, поэтому необходимо использовать различные численные методы для приближенного решения.

Численное решение. Для моделирования задач гидродинамики обычно применяются методы конечных разностей и конечных элементов. Использование метода конечных разностей для моделирования двумерного неустановившегося движения воды в открытых руслах эффективно применяется в случае, если область определения переменных потока имеет правильную форму. Использование конечно-разностного метода для моделирования двумерного движения воды использовались в работах [2-5]. В случае, если область определения имеет неправильную форму, использование конечно-разностного метода усложняется в построении разностной сетки и определении граничных условий.

В последние годы с развитием теории аппроксимации, сплайнов и методов Галеркина [6, 7] для моделирования двумерных объектов со сложными областями определения широко начали использоваться метод конечных элементов. Метод конечных элементов стал почти незаменимым в случае, когда необходимо учесть геометрические особенности областей определения. В этом случае современный компьютер используется одновременно для формулирования и построения дискретных аппроксимаций и для решения системы уравнений, поэтому в данной работе рассмотрено применение метода конечных элементов для моделирования двумерного неустановившегося движения воды в открытых руслах.

Производя разностную аппроксимацию уравнения (9) первого порядка по времени получим

$$\frac{\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k}{\tau} + \mathbf{A}(\mathbf{U}^{k+1}) \frac{\partial \mathbf{U}^{k+1}}{\partial x} + \mathbf{B}(\mathbf{U}^{k+1}) \frac{\partial \mathbf{U}^{k+1}}{\partial y} + \mathbf{D}(\mathbf{U}^{k+1}) = 0 \quad k=1,2,3, \dots \quad (16)$$

Линеаризуя коэффициенты уравнения и учитывая непрерывность параметров потока, после несложных преобразований получим уравнение

$$\mathbf{E}^k \frac{\partial \mathbf{U}^{k+1}}{\partial x} + \mathbf{F}^k \frac{\partial \mathbf{U}^{k+1}}{\partial y} + \mathbf{G}^k \mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{R}^k \quad k=1,2,3, \dots \quad (17)$$

где матрицы \mathbf{E}^k , \mathbf{F}^k , \mathbf{G}^k и \mathbf{R}^k определяются следующим образом

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^k &= \mathbf{A}^k + \left(\mathbf{A}_U^k - \mathbf{U}^k \right) + \frac{1}{2} \mathbf{A}_U^k \mathbf{U}^k \\
\mathbf{F}^k &= \mathbf{B}^k + \left(\mathbf{B}_U^k - \mathbf{U}^k \right) + \frac{1}{2} \mathbf{B}_U^k \mathbf{U}^k \\
\mathbf{G}^k &= \frac{1}{2} \mathbf{A}_U^k \frac{\partial \mathbf{U}^k}{\partial x} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_U^k \frac{\partial \mathbf{U}^k}{\partial y} + \mathbf{D}_U^k + \frac{1}{\tau} \\
\mathbf{R}^k &= \left(\mathbf{D}_U^k + \frac{1}{\tau} \right) \mathbf{U}^k - \mathbf{D}^k \\
\mathbf{A}_U^k &= \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{U}} \right)_k, \quad \mathbf{B}_U^k = \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{U}} \right)_k, \quad \mathbf{D}_U^k = \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{U}} \right)_k
\end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, мы получили на каждом шаге уравнение для неизвестных векторов \mathbf{U}^{k+1} на основе данных предыдущего шага.

Начальное условие.

$$\mathbf{U}(x, y, t_0) = \mathbf{U}^0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

Граничные условия по времени определяются следующим образом:

На жидких границах

$$\begin{aligned}
h_i^{k+1}(x, y, t_{k+1}) &= H_i^{k+1}(t_{k+1}), \\
q_i^{k+1}(x, y, t_{k+1}) \cos \alpha + p_i^{k+1}(x, y, t_{k+1}) \sin \alpha &= Q_i^{k+1}(t), \\
\alpha &= \widehat{(n, Ox)}, \quad (x, y) \in d\Omega_{\text{жи}} \quad i = 1, n_{\text{ж}}
\end{aligned} \tag{19}$$

На твердых границах

$$\begin{aligned}
q_i^{k+1}(x, y, t_{k+1}) \cos \alpha + p_i^{k+1}(x, y, t_{k+1}) \sin \alpha &= 0, \\
\alpha &= \widehat{(n, Ox)}, \quad (x, y) \in d\Omega_{\text{ти}} \quad i = 1, n_{\text{т}}
\end{aligned} \tag{20}$$

Для численного решения уравнения (17) с граничными условиями используем метод конечного элемента, использующий схему Галеркина-Петрова:

1. Область определения Ω переменных разбивается на N конечные подобласти $\Omega_i (i = 1, 2, \dots, N)$ (например, неправильные треугольники и четырехугольники,

имеющие площади одного порядка) так, чтобы $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, при $i \neq j$;

2. Выбираем базис $\{\varphi_i(x, y)\}$ и $\{\psi_i(x, y)\}$ - для подобластей Ω_i ;

3. Базисы для элементов выбираются из условий аппроксимации, например, для треугольного элемента линейная аппроксимация имеет вид

$$P_m(x, y) = \sum_{i=1}^3 Q_i p_i(x, y),$$

где $Q_i (i = 1, 2, 3)$ – значения функции $U(x, y)$ в вершинах треугольника p_i , а

$$p_i(x, y) = \frac{1}{C_{jkl}} (\tau_{kl} + \eta_{kl}x + \xi_{kl}y) = \frac{D_{kl}}{C_{jkl}},$$

где

$$\tau_{kl} = x_k y_l - y_k x_l, \quad \xi_{kl} = x_k - y_l, \quad \eta_{kl} = y_k - y_l,$$

$$D_{kl} = \det \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \end{bmatrix}, \quad C_{jkl} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \end{bmatrix},$$

Причем (j, k, l) – произвольная перестановка узлов треугольника $(1, 2, 3)$, а $|C_{jkl}|$ – удвоенная площадь треугольника $P_1 P_2 P_3$. Нетрудно заметить, что

$$p_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k), \end{cases} \quad 1 \leq j, k \leq 3.$$

4. Второй базис $\{\psi_i(x, y)\}$ выбираем как характеристическую функцию области Ω_i :

$$\psi_i(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega_i, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_i. \end{cases} \quad (21)$$

5. Приближенное решение $U^{k+1}(x, y)$ ищется в виде

$$U_{N_i}^{k+1}(x, y) = \sum_{i=1}^{N_i} Q_i \varphi_i(x, y), \quad (22)$$

где Q_i – вектор-матрица неизвестных коэффициентов и количество функции аппроксимациях элементов области определения переменных.

6. Для определения коэффициентов Q_i во внутренних точках области определения переменных используется система уравнений

$$\left(\mathbf{E}^k \frac{\partial U_{N_i}^{k+1}}{\partial x} + \mathbf{F}^k \frac{\partial U_{N_i}^{k+1}}{\partial y} + \mathbf{G}^k U_{N_i}^{k+1} - \mathbf{R}^k, \psi_j \right), \quad j=1, 2, \dots, N.$$

Или

$$\sum_{i=1}^{N_i} Q_i \int_{\Omega_j} \left(\mathbf{E}^k \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial x} + \mathbf{F}^k \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial y} + \mathbf{G}^k \varphi_i(x, y) - \mathbf{R}^k \right) dx dy = 0, \quad j=1, 2, \dots, N \quad (23)$$

где (u, v) скалярное произведение. Элементы матрицы \mathbf{E}^k , \mathbf{F}^k , \mathbf{G}^k и \mathbf{R}^k вычисляются по данным предыдущего шага по времени.

7. По заданным краевым условиям (19) – (20) составляются дополнительные уравнения для неизвестных граничных точек;

8. Вычисляя интегралы в (23) получаем систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных Q_i .

9. Решая полученную систему линейных алгебраических уравнений, получим коэффициенты Q_i для всех узлов сетки, далее по формуле (22) получим решение дифференциального уравнения (17) с граничными условиями (19)-(20).

10. Далее пункты 6-9 алгоритма циклически повторяются для последующих шагов по времени.

Вышеприведенный алгоритм позволяет осуществить моделирование неустановившегося движения воды в открытых руслах.

Подготовка данных для моделирования. Основными данными для моделирования являются гидравлические и морфометрические параметры дна и потока воды:

– данные дна участка, которые задаются по узлам разбитой сетки области в следующей таблице с полями $\{i, x, y, z\}$, где i – номер узла, x – координата по оси x , y – координата по оси y , z – координата по оси z .

Например:

i	x	y	z
1	234201.37	441578.18	0.10
2	234471.73	441578.18	0.20
3	234742.08	441578.18	0.30

– элементы области и способы аппроксимации задаются в следующей таблице с полями $\{k, i_1, i_2, i_3, i_4, apr\}$, где k – номер элемента, i_1 – первый узел элемента, i_2 – второй узел элемента, i_3 – третий узел элемента, i_4 – четвертый узел элемента, apr – способ аппроксимации при выборе базисов элемента.

Например:

k	i_1	i_2	i_3	i_4	apr
1	41	42	12	11	лин
2	42	43	13	12	лин
3	43	44	14	13	лин

– граничные условия задаются с помощью таблицы с полями $\{k, i_1, i_2, i_3, i_4, \dots\}$, где k – номер границы, i_1 – первый узел границы, i_2 – второй узел границы, i_3 – третий узел границы, i_4 – четвертый узел границы и др.

Например:

k	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6
1	300	330	270	240	210	180
2	301	271	231	201	171	161

Результаты моделирования. Было промоделировано двумерное неустановившееся движение воды для следующих случаев.

Пример 1. Прямоугольный участок русла с сужением с помощью стенок с двух сторон.

Параметры прямоугольного русла по ширине 2700,0 м, а по длине 7600,0 м. Русло разбито на 261 четырехугольный элемент, примерная площадь каждого четырехугольника равна 68–67 тыс. кв. м.

Участок русла (рис. 1 а) был разбит на прямоугольные элементы, в середине участка имеется сужение участка с помощью твердых тонких стенок. Длина стенки составляет три ширины прямоугольного элемента, ширина стенки равна одну треть длины элемента.

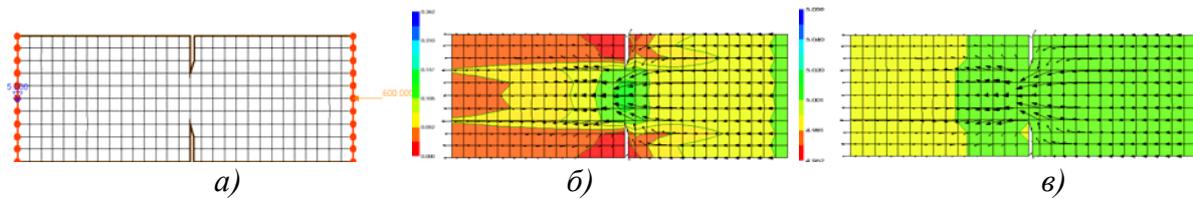


Рис. 1 - Прямоугольный участок русло с сужением

Начальные условия приняты по всему руслу равным расходу воды равным нулю и глубина 5,0 м, то есть в русле была стоячая вода.

На верхних и нижних границах приняты условия равенства нулю расхода воды по нормали.

В качестве граничных условий в правой стороне прямоугольника принята жидкая граница с постоянным расходом воды равным $600 \text{ м}^3/\text{с}$, а в левой части участка выбран постоянный горизонт воды равный 5,0 м. С момента начала численного эксперимента вода с правой границы равномерно начала поступать расходом воды $600 \text{ м}^3/\text{с}$ и начались изменения параметров водного потока.

На рис. 1 б и в показаны эпюры скоростей, свободной поверхности потока и направление скоростей водного потока через 10 часов после начала процесса. В левой части рисунка (рис. 1 б) приведены шкалы скоростей и свободной поверхности. Из рис. 1 б видно, что максимальные скорости потока имеются в отверстии вблизи стенок. Из полей свободных поверхностей потока (рис. 1 в) видны значения подпора от стенки сужения.

Пример 2. Прямоугольный участок русла (рис. 2 а) с последовательно расположенными шпорами. Параметры прямоугольного русла, начальные и граничные условия аналогичны как в первом примере.

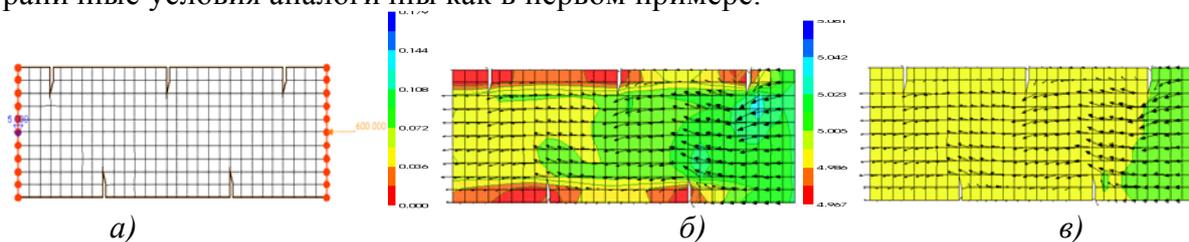


Рис. 2. - Прямоугольный участок русло со шпорам на двух сторон

Начальные условия приняты по всему руслу равным расходу воды равным нулю и глубина 5,0 м, то есть в русле была стоячая вода.

На рис. 2 б и в показаны эпюры скоростей, свободной поверхности потока и направление скоростей водного потока через 10 часов после начала процесса.

Пример 3. Русло со сложными геометрическими формами (рис. 3 а). Участок русла разбит на треугольные элементы, которые удобны для аппроксимации сложных областей.

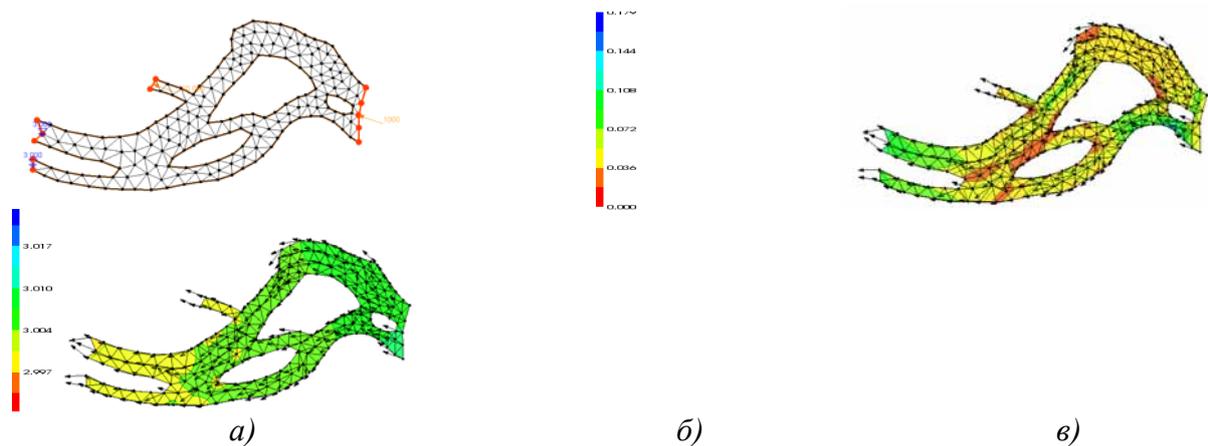


Рис. 3 - Прямоугольный участок русла со шпорами на двух сторонах

Начальные условия приняты по всему руслу равным расходу воды равным нулю и глубина 3,0 м. Здесь имеются четыре жидкие границы, в двух задаются изменения расхода воды, а в остальных двух задаются горизонты воды.

На рис. 3 б и в показаны эпюры скоростей, свободной поверхности потока и направление скоростей водного потока через 15 часов после начала процесса. Из эпюры скоростей видны, те места, где имеются большие скорости, т.е. места смыва и меньшие скорости места заиления.

Таким образом, учет многомерности параметров водохозяйственных объектов в пространстве и связанной с ней динамики переходных процессов водных ресурсов, при разработке системы моделирования, дает возможность оценить качественные и количественные изменения параметров потока воды по длине и ширине русла, а также позволяет определить проектные параметры новых сооружений и улучшить эксплуатационные параметры имеющихся гидротехнических сооружений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В. Основные океанологические задачи теории мелкой воды. - Л. Гидрометеиздат, 1968. – 300 с.
2. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. - М.: Наука, 1977. – 499 с.
3. Грушевский М.С. Неустановившееся движение воды в реках и каналах. - Л.: Гидрометеиздат, 1982. – 288 с.
4. Кюнж Ж.А., Холи Ф.М., Вервей А. Численные методы в задачах речной гидравлики. - М.: Энергоатомиздат, 1985. – 253 с.
5. Ляхтер В.М., Милитеев А.Н. Гидравлические исследования численными методами // Водные ресурсы. – 1981. - № 3. - С. 17-29.
6. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука, 1981. – 416 с.
7. Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1980. – 495 с.